NEUIGKEITEN ZUM SATZ DES PYTHAGORAS UND DEN PLATONISCHEN KÖRPERN

*“DIE MATHEMATIK ALS FACHGEBIET IST
SO ERNST, DASS MAN KEINE
GELEGENHEIT VERSÄUMEN SOLLTE, SIE
ETWAS UNTERHALTSAMER ZU
GESTALTEN.”*

BLAISE PASCAL (1623 – 1662)

NEUIGKEITEN ZUM SATZ DES PYTHAGORAS UND DEN PLATONISCHEN KÖRPERN

Übergang vom regulären Fünfeck zum gleichseitigen Dreieck

W35+ ist ein Faltmodell, welches sich vom regulären Fünfeck (Pentagon) ins gleichseitige Dreieck und vice versa drehen lässt. Diese Operation geht zurück auf Mäster Goldberg, einen Mathematiker, der diese Entdeckung im Ende der 1960er Jahren des vorigen Jahrhunderts gemacht hat. Das W35+ ist es uns mittels einem Dabek-Parallelogramm gelungen, Goldberg's Lösung einem grafischen Nutzen zuzuführen.

Das Faltmodell ist leicht zu handhaben und liegt angenehm in der Hand. W35+ ist ein Vorgänger zum Flächenmodell „Mäster Goldberg“. Der Hauptunterschied zwischen diesen beiden Flächen liegt darin, dass die Fläche „Mäster Goldberg“ in den beiden Endzuständen in einer Ebene zu liegen kommt. W35+ hingegen ist auf 2 Ebenen (siehe Abbildung) und ist auch von der Handhabung einfacher und robuster. Für die Faltung sind auf der Rückseite Dreiecke angebracht, welche in den beiden Endzuständen das Modell vollständig verdeckt bleiben. Auch die Abmessungen dieses Faltmodells sind beachtlich.

W35+ eignet sich unter anderem hervorragend für das Lehrpersonal, damit die Transformation auch von Schülern in der hintersten Reihe gut verfolgt werden kann.

Die Platonischen Körper

Unser Ziel ist es, die 5 Platonischen Körper mit einer minimalen Anzahl an Flächen aufzubauen.

altes System: 38 Flächen

unser System: nur 20 Flächen !

Um unser Ziel zu erreichen, benötigen wir 2 spezielle Faltmodelle. Das erste nennt sich „Sir Dudeney“ und das zweite „Mister Goldberg“. Wir diskutieren jetzt das Faltmodell „Mister Goldberg“:

Vorbereitung für das zweite Faltmodell

Worum geht es?

Wir interessieren uns für die Dissection von Herrn Michael Goldberg (1902 – 1990). Dies deshalb, weil diese Transformation vom gleichseitiges Dreieck ins reguläre Fünfeck transformiert, und wir genau diese Flächen auch bei den Platonischen Körpern antreffen.

Zerlegungsgleichheit

Abb. 1: Gleichseitiges Dreieck und regelmäßiges Fünfeck - 6 Teile

Wie kommt man auf diese Zerlegung?

Abb. 2: T (Trapez) - Streifen - Methode

Allein mit dem Wissen, dass beide Flächen gleich groß sein müssen, können wir nun sämtliche Längen und Winkel berechnen, welche für die Konstruktion von Goldberg's Zerlegung notwendig sind.

Bezeichnungen und Daten

Wir normieren die Flächen der beiden Polygone auf 1.

Für die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks erhalten wir damit:

$$s = 2/\sqrt[4]{3} \approx 1.5196713713 \quad (1)$$

Für die Seitenlänge u des Fünfecks erhalten wir:

$$u = 2 \times \sqrt{[(1/5) \times \tan(36^\circ)]} \approx 0.7623870555 \quad (2)$$

Das Seitenverhältnis ist:

$$s/u \approx 1.993306891 \quad (3)$$

Die Seitenlänge des Dreiecks ist also fast doppelt so groß wie jene des Fünfecks.

Konstruktives Vorgehen

Φ (Phi) ist die goldene Zahl:

Abb. 3: Erste drei Schritte - Horizontale, Parallele zur li. Topfseite, halbe Dreieckseite

Konstruktives Vorgehen

Abb. 4: Ergänzung zum gleichseitiges Dreieck, Parallele zu magenta $\rightarrow$ 3 mal 60° , Parallelogramm, hellblaues Viereck kein Parallelogramm

Damit sind die sechs Teile der Zerlegung konstruierbar.

Neuheit: Ein Gelenkmodell, das alle Teile verbindet !

Bisher:
Goldberg's Zerlegung verwendet vereinzelt
Gelenke

Abb. 5: Klassisches Verfahren

NEU:
Unsere Zerlegung beruht auf 4 Gelenke
mit Dreharmen

Abb.6: Kinematischer Prozess

Anzahl der Ebenen

Faltmodelle W35, W35+ / 3 Ebenen

Abb. 7: Transformation gleichseitiges Dreieck - Quadrat / 3 Ebenen

Anzahl der Ebenen

Mister Goldberg / 1 Ebene

Abb. 8: Transformation gleichseitiges Dreieck - reguläres Fünfeck / 1 Ebene - Aufbau der Platonischen Körper

Beschriftung der Modelle W35, W35+ und Mister Goldberg

Zusätzlicher Lerneffekt! Motivation!

Vorderseite - Faltmodell Mister Goldberg

- Euler'sche Identität
- Euler'scher Polyedersatz
- Pythagoräische Lehrsatz
- Winkelsumme in einem n-Eck
- Konstanten

Abb. 9: Faltmodell mit mathematischen Formeln beschriftet

Rückseite - Faltmodell Mister Goldberg

Zusätzlicher Lerneffekt! Motivation!

- Geometrie der Fläche

Abb. 10: Geometrie der Fläche